

1^η εργασίας ΔΕΟ13 2013-2014

Υποδειγματική λύση

(όπως θα παρατηρήσετε η εργασία περιέχει και κάποια επιπλέον σχόλια, για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας, τα οποία φυσικά μπορούν να παραλειφθούν)

Άσκηση 1

1.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης με τον άξονα $y'y$ (το σημείο αυτό, αν υπάρχει, είναι μοναδικό) πηγαίνουμε στην εξίσωση της συνάρτησης, θέτουμε $x=0$ και υπολογίζουμε το y . Στην περίπτωση μας είναι:

$$\text{Για } X=0 \Rightarrow Y=40-4\cdot 0 \Rightarrow Y=40$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(0,40)$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης με τον άξονα $x'x$ (μπορεί να είναι κανένα, ένα ή περισσότερα) πηγαίνουμε στην εξίσωση της συνάρτησης, θέτουμε $y=0$ και υπολογίζουμε το x . Στην περίπτωση μας είναι:

$$\text{Για } Y=0 \Rightarrow 0=40-4\cdot X \Rightarrow X=10$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(10,0)$.

2.

Αν οι συναρτήσεις τέμνονται, οι γραφικές τους παραστάσεις θα διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δηλαδή θα υπάρχει κάποιο x (ή και περισσότερα) που θα ανήκει στο πεδίο ορισμού και των δύο συναρτήσεων το οποίο θα δίνει την ίδια τιμή και στις δύο συναρτήσεις. Για να βρούμε αυτά τα x αρκεί λοιπόν να εξισώσουμε τους τύπους τους, δηλαδή:

$$40-4X=5+X \Leftrightarrow 5X=35 \Leftrightarrow X=7$$

Επειδή η άσκηση μας ζητάει το σημείο πρέπει να υπολογίσουμε και το y :

$$X=7 \Rightarrow Y=40-4\cdot 7 \Rightarrow Y=12$$

(Προφανώς, λόγω του σκεπτικού που αναπτύξαμε παραπάνω, αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο της άλλης συνάρτησης θα έπρεπε να βρούμε την ίδια τιμή y)

Άρα το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων είναι το $(7,12)$

3.

Αν γνωρίζουμε ότι μία ευθεία διέρχεται από ένα σημείο (x_1, y_1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τότε η εξίσωσή της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$y-y_1=\lambda(x-x_1)$$

Άρα για $(x_1, y_1) = (2, 4)$ και $\lambda = 1,6$ ο τύπος μας δίνει:

$$y - 4 = 1,6(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 1,6x - 3,2 \Leftrightarrow y = 1,6x + 0,8$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας με τους δύο άξονες, εργαζόμαστε όπως και το ερώτημα 1 :

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow y = 1,6 \cdot 0 + 0,8 \Rightarrow y = 0,8$$

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, 0,8)$.

$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow 0 = 1,6 \cdot x + 0,8 \Rightarrow x = -0,5$$

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $(-0,5, 0)$.

4.

Αν γνωρίζουμε ότι μία ευθεία διέρχεται από δύο σημεία, τα (x_1, y_1) και (x_2, y_2) τότε η εξίσωσή της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Άρα για $(x_1, y_1) = (1,5, 2,5)$ και $(x_2, y_2) = (3,5, 4,5)$ η εξίσωσή της ευθείας

$$\text{είναι: } y - 2,5 = \frac{4,5 - 2,5}{3,5 - 1,5}(x - 1,5) \Leftrightarrow y - 2,5 = \frac{2}{2}(x - 1,5) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Άσκηση 2

1α.

Όταν προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα άθροισμα συνήθως:

(i) ελέγχουμε αν υπάρχει κοινός παράγοντας όλων των όρων, (ii) αν μπορεί να επιτευχθεί παραγοντοποίηση με χρήση ταυτοτήτων και (iii) αν μπορούμε να προχωρήσουμε σε παραγοντοποίηση κατά ζεύγη.

$$f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

Εδώ θα παραγοντοποιήσουμε κατά ζεύγη με στόχο να δημιουργηθεί ο κοινός παράγοντας $(x - 1)$.

$$\text{Είναι: } x^6 - x^5 = x^5(x - 1) \text{ και } -x + 1 = -(x - 1) \text{ όμως πώς θα}$$

διαχειριστούμε το: $x^4 - 2x^3 + x^2$;

Θα σπάσουμε το $-2x^3$ και θα γράψουμε:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^4 - x^3 - x^3 + x^2 = x^3(x-1) - x^2(x-1)$$

Τελικά έχουμε: $f(x) = x^5(x-1) + x^3(x-1) - x^2(x-1) - (x-1) =$
 $(x-1)(x^5 + x^3 - x^2 - 1).$

Όμως δεν έχουμε ακόμα τελειώσει καθώς η δεύτερη παρένθεση μπορεί να παραγοντοποιηθεί κι άλλο και μάλιστα με περισσότερους από έναν τρόπους. Θα συνεχίσουμε πάλι με παραγοντοποίηση κατά ζεύγη:

$$f(x) = (x-1)(x^5 + x^3 - x^2 - 1) = (x-1)[x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1)] =$$

$$(x-1)(x^2 + 1)(x^3 - 1) \text{ και με χρήση της ταυτότητας:}$$

$$(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1) \text{ παίρνουμε τελικά:}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) = (x-1)^2(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

Τα πολυώνυμα $x^2 + 1$ και $x^2 + x + 1$ είναι δευτεροβάθμια πολυώνυμα με αρνητική διακρίνουσα, οπότε δεν παραγοντοποιούνται περαιτέρω στο $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι στους πραγματικούς αριθμούς τα πολυώνυμα που παραγοντοποιούνται είναι τα δευτεροβάθμια με μη-αρνητική διακρίνουσα και όλα όσα είναι μεγαλύτερου βαθμού από 2.

1β.

Αφού η $f(x)$ είναι πολυώνυμο θα έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

αφού, όπως είπαμε, τα πολυώνυμα $x^2 + 1$ και $x^2 + x + 1$ είναι δευτεροβάθμια πολυώνυμα με αρνητική διακρίνουσα, άρα δεν έχουν πραγματικές ρίζες. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα την $x = 1$

2α.

Το ότι το αγαθό διανέμεται δωρεάν σημαίνει ότι $P = 0$ οπότε, με αντικατάσταση της τιμής στην εξίσωση ζήτησης βρίσκουμε ποσότητα:

$$Q_d = 0^2 - 0 \cdot 100 + 2500 = 2500$$

Για να βρούμε την τιμή για $Q_d = 0$ λύνουμε την εξίσωση:

$$P^2 - 100P + 2500 = 0 \Leftrightarrow (P - 50)^2 = 0 \Leftrightarrow P = 50$$

2β.

Αναζητούμε τα $P \in \mathbb{R}$ ώστε $Q_d = P^2 - 100P + 2500 = (P - 50)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε τιμή του P .

Επιπλέον πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι η συνάρτηση ζήτησης είναι πάντα φθίνουσα (είναι φυσιολογικό η ζήτηση να μειώνεται όσο αυξάνει η τιμή του προϊόντος). Όμως ενώ για $P = 50$ είναι $Q_d = 0$, για $P > 50$ είναι $Q_d > 0$ που δεν είναι φυσιολογικό. (Ενώ η ζήτηση μηδενίζεται για τιμή 50, γίνεται θετική για τιμές μεγαλύτερες του 50 ;)

Άρα το ζητούμενο πεδίο ορισμού ώστε η καμπύλη να βρίσκεται στο θετικό τεταρτημόριο και η συνάρτηση να έχει το νόημα συνάρτησης ζήτησης είναι το: $[0, 50]$

Οι απαντήσεις του ερωτήματος 2γ καθώς και ολόκληρης της άσκησης 3 παραλείπονται.

Σε περίπτωση που χρειάζεστε βοήθεια στη χρήση υπολογιστικών φύλλων Excel, στείλτε μας e-mail στο study@deo13.gr

Θα χαρούμε να σας εξυπηρετήσουμε.

Άσκηση 4

1.

Στη λογιστική εξίσωση εισοδήματος αντικαθιστούμε όλα τα υπόλοιπα μεγέθη εκτός του Y . Έτσι, σε πρώτη φάση αντικαθιστούμε το $C = 73,75 + 0,75Y_d$, το $I = 100$ και το $G = 40 + 0,1Y$. Η εξίσωση γίνεται:

$$Y = 73,75 + 0,75Y_d + 100 + 40 + 0,1Y$$

Έπειτα αντικαθιστούμε το $Y_d = Y - T + F$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$Y = 73,75 + 0,75(Y - T + F) + 100 + 40 + 0,1Y = 213,75 + 0,85Y - 0,75T + 0,75F$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $T = -20 + 0,2Y$ και $F = 100 - 0,05Y$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$Y = 213,75 + 0,85Y - 0,75(0,2Y - 20) + 0,75(100 - 0,05Y) \Leftrightarrow$$

$$Y = 213,75 + 0,85Y - 0,15Y + 15 + 75 - 0,0375Y \Leftrightarrow$$

$$Y = 303,75 + 0,6625Y \Leftrightarrow 0,3375Y = 303,75 \Leftrightarrow Y = 900$$

Οπότε, για εισόδημα ισορροπίας $Y = 900$ θα βρούμε τις τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών:

$$T = -20 + 0,2 \cdot 900 = 160$$

$$F = 100 - 0,05 \cdot 900 = 55$$

$$Y_d = 900 - 160 + 55 = 795$$

$$G = 40 + 0,1 \cdot 900 = 130$$

$$C = 73,75 + 0,75 \cdot 795 = 670$$

2.

Αφού στην ισορροπία ισχύει: $S = I$, η λογιστική εξίσωση εισοδήματος γράφεται: $Y = C + S + G \Leftrightarrow S = Y - C - G$ και με διαδοχικές αντικαταστάσεις παίρνουμε:

$$S = Y - (73,75 + 0,75Y_d) - (40 + 0,1Y) \Leftrightarrow$$

$$S = Y - 73,75 - 0,75(Y - T + F) - 40 - 0,1Y \Leftrightarrow$$

$$S = 0,9Y - 113,75 - 0,75[Y - (-20 + 0,2Y) + 100 - 0,05Y] \Leftrightarrow$$

$$S = 0,9Y - 113,75 - 0,75(Y + 20 - 0,2Y + 100 - 0,05Y) \Leftrightarrow$$

$$S = 0,9Y - 113,75 - 0,75(0,75Y + 120) \Leftrightarrow$$

$$S = 0,9Y - 113,75 - 0,5625Y - 90 \Leftrightarrow$$

$$S = 0,3375Y - 203,75$$

3.

Θα ξανακάνουμε διαδοχικές αντικαταστάσεις στη λογιστική εξίσωση του εισοδήματος, μόνο που αυτή τη φορά θα θέσουμε: $G = 40 + (0,1 + dg)Y$ όπου dg η ζητούμενη μεταβολή του συντελεστή g .

$$Y = 73,75 + 0,75Y_d + 100 + 40 + (0,1 + dg)Y \Leftrightarrow$$

$$(0,9 - dg)Y = 213,75 + 0,75(Y - T + F) \Leftrightarrow$$

$$(0,9 - dg)Y = 213,75 + 0,75[Y - (-20 + 0,2Y) + 100 - 0,05Y] \Leftrightarrow$$

$$(0,9 - dg)Y = 213,75 + 0,75(0,95Y + 20 - 0,2Y + 100) \Leftrightarrow$$

$$(0,9 - dg)Y = 213,75 + 0,75(0,75Y + 120) \Leftrightarrow$$

$$(0,9 - dg)Y = 213,75 + 0,5625Y + 90$$

Θέτοντας, τώρα, $Y = 1000$ προκύπτει:

$$(0,9 - dg)1000 = 213,75 + 0,5625 \cdot 1000 + 90 \Leftrightarrow$$

$$900 - 1000dg = 213,75 + 562,5 + 90 \Leftrightarrow$$

$$900 - 1000dg = 866,25 \Leftrightarrow$$

$$-1000dg = -33,75 \Leftrightarrow$$

$$dg = 0,03375$$

Άρα ο συντελεστής πρέπει να αυξηθεί κατά 0,03375 μονάδες ή αλλιώς κατά

$$\text{ποσοστό } \frac{0,03375}{0,1} = 0,3375 = 33,75\%$$

Οι νέες τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών θα είναι:

$$T = -20 + 0,2 \cdot 1000 = 180$$

$$F = 100 - 0,05 \cdot 1000 = 50$$

$$Y_d = 1000 - 180 + 50 = 870$$

$$G = 40 + 0,13375 \cdot 1000 = 173,75$$

$$C = 73,75 + 0,75 \cdot 870 = 726,25$$

ενώ η εξίσωση της αποταμίευσης θα είναι:

$$S = Y - (73,75 + 0,75Y_d) - (40 + 0,13375Y) \Leftrightarrow$$

$$S = Y - 73,75 - 0,75(Y - T + F) - 40 - 0,13375Y \Leftrightarrow$$

$$S = 0,86625Y - 113,75 - 0,75[Y - (-20 + 0,2Y) + 100 - 0,05Y] \Leftrightarrow$$

$$S = 0,86625Y - 113,75 - 0,75(Y + 20 - 0,2Y + 100 - 0,05Y) \Leftrightarrow$$

$$S = 0,86625Y - 113,75 - 0,75(0,75Y + 120) \Leftrightarrow$$

$$S = 0,86625Y - 113,75 - 0,5625Y - 90 \Leftrightarrow$$

$$S = 0,30375Y - 203,75$$